Grupa A - Pismeni ispit iz Matematike, 30.01.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka, obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} -x + 6y + (\lambda+3)z &= 21 \\ -x + 3y + 2z &= 9 \\ x + 3y + 2\lambda z &= \lambda + 13. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}.$$

3. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{6x^2-19x+9}{(x-2)(x^2-5x+6)}\mathrm{d}x.$

4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y' + y\operatorname{tg} x = \cos x.$

Grupa B - Pismeni ispit iz Matematike, 30.01.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka, obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} -x + 8y + (\lambda+4)z &= 29 \\ -x + 4y + 3z &= 13 \\ x + 4y + (2\lambda-1)z &= \lambda + 16. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \ln(2x^2 - x^4).$$

3. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{8x^2+39x+11}{(x+2)(x^2-x-6)}\mathrm{d}x.$

4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $x^2y^2y' + xy^3 = y^2.$

Grupa C - Pismeni ispit iz Matematike, 30.01.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka, obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} -x + 10y + (\lambda+5)z &= 37 \\ -x + 5y + 4z &= 17 \\ x + 5y + (2\lambda-2)z &= \lambda + 19. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

3. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{8x^2-35x+3}{(x^2+1)(x-7)}\mathrm{d}x.$

4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y' - y\sin 2x = e^{\sin^2 x}.$

Grupa D - Pismeni ispit iz Matematike, 30.01.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka, obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} -x + 8y + (\lambda+4)z &= 29 \\ -x + 4y + 3z &= 13 \\ x + 4y + (2\lambda-1)z &= \lambda + 16. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \ln(2x^2 - x^4).$$

3. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{8x^2+39x+11}{(x+2)(x^2-x-6)}\mathrm{d}x.$

4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $x^2y^2y' + xy^3 = y^2.$

Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ.

$$\begin{aligned} -x + 6y + (\lambda+3)z &= 21 \\ -x + 3y + 2z &= 9 \\ x + 3y + 2\lambda z &= \lambda + 13 \end{aligned}$$

Rj.-upute:

Sistem rješimo metodom determinanti (upotrebom Cramerovog pravila)

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 6 & \lambda+3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix} = \dots = 0 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 21 & 6 & \lambda+3 \\ 9 & 3 & 2 \\ \lambda+13 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix} = \dots = (-3)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 21 & \lambda+3 \\ -1 & 9 & 2 \\ 1 & \lambda+13 & 2\lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda+1)(\lambda-2) \qquad D_z = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 21 \\ -1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & \lambda+13 \end{vmatrix} = \dots = 3(\lambda-2)$$

Diskusija

1° $\lambda \neq 2 \Rightarrow D = 0$ i npr. $D_z \neq 0$

sistem nema rješenja

2° $\lambda = 2 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0$ pa sistem moramo rješiti na drugi način

Za $\lambda = 2$ sistem postaje
$$\begin{aligned} -x + 6y + 5z &= 21 \\ -x + 3y + 2z &= 9 \\ x + 3y + 4z &= 15 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 5 & 21 \\ -1 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 15 \end{array}\right] \sim \dots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 4-t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

rješenje sistema za $\lambda = 2$

Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ.

$$\begin{aligned} -x + 8y + (\lambda+4)z &= 29 \\ -x + 4y + 3z &= 13 \\ x + 4y + (2\lambda-1)z &= \lambda+16 \end{aligned}$$

Rj.-upute:

Sistem rješimo upotrebom Cramerovog pravila (metodom determin.)

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 8 & \lambda+4 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} \underset{II_v+III_v}{\overset{I_v+III_v}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 12 & 3\lambda+3 \\ 0 & 8 & 2\lambda+2 \\ 1 & 4 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} = \ldots = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 29 & 8 & \lambda+ \\ 13 & 4 & 3 \\ \lambda+16 & 4 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 29 & 2 & \lambda+3 \\ 13 & 1 & 3 \\ \lambda+16 & 1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} = \ldots = (-4)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 29 & \lambda+4 \\ -1 & 13 & 3 \\ 1 & \lambda+16 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} = \ldots = (-1)(\lambda+1)(\lambda-3), \quad D_z = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 29 \\ -1 & 4 & 13 \\ 1 & 4 & \lambda+16 \end{vmatrix} = \ldots = 4(\lambda-3)$$

Diskusija

1° $\lambda \neq 3 \Rightarrow D=0$ i npr. $D_z \neq 0$

sistem nema rješenje

2° $\lambda = 3 \overset{D=D_x=D_y=D_z=0}{\Rightarrow}$ sistem postaje

$$\begin{aligned} -x + 8y + 7z &= 29 \\ -x + 4y + 3z &= 13 \\ x + 4y + 5z &= 21 \end{aligned}$$

Sistem npr. možemo riješiti Kron.-Kap metodom:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 7 & 29 \\ -1 & 4 & 3 & 13 \\ 1 & 4 & 5 & 19 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rješenje sistema je: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-s \\ 4-s \\ s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} -x + 10y + (\lambda+5)z &= 37 \\ -x + 5y + 4z &= 17 \\ x + 5y + (2\lambda-2)z &= \lambda+19 \end{aligned}$$

Rj.-upute:

Sistem rješimo upotrebom Kramerovog pravila

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 10 & \lambda+5 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 2\lambda-2 \end{vmatrix} = \ldots = 0 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 37 & 10 & \lambda+5 \\ 17 & 5 & 4 \\ \lambda+19 & 5 & 2\lambda-2 \end{vmatrix} = \ldots = (-5)(\lambda-3)(\lambda-4)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 37 & \lambda+5 \\ -1 & 17 & 4 \\ 1 & \lambda+19 & 2\lambda-2 \end{vmatrix} = \ldots = (-1)(\lambda+1)(\lambda-4) \qquad D_z = \begin{vmatrix} -1 & 10 & 37 \\ -1 & 5 & 17 \\ 1 & 5 & \lambda+19 \end{vmatrix} = \ldots = 5(\lambda-4)$$

Diskusija

1° $\lambda \neq 4 \Rightarrow D=0,\ D_z \neq 0 \Rightarrow$ sistem nema rješenje

2° $\lambda = 4 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0 \Rightarrow$ sistem rješimo na drugi način npr. Kroneker-Kapelijevom metodom

Sistem postaje

$$\begin{aligned} -x + 10y + 9z &= 37 \\ -x + 5y + 4z &= 17 \\ x + 5y + 6z &= 23 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 10 & 9 & 37 \\ -1 & 5 & 4 & 17 \\ 1 & 5 & 6 & 23 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-s \\ 4-s \\ s \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

rješenje sistema

Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik $y=\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$.

Rj.-upute:

$D: x \in \mathbb{R}$

parna f-ja (simetrična u odnosu na y-osu)

$(0,-1)$ presjek sa y-osom.

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ nule f-je

x	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$
y	−	+

znak f-je

nema tačke prekida

$\Downarrow$

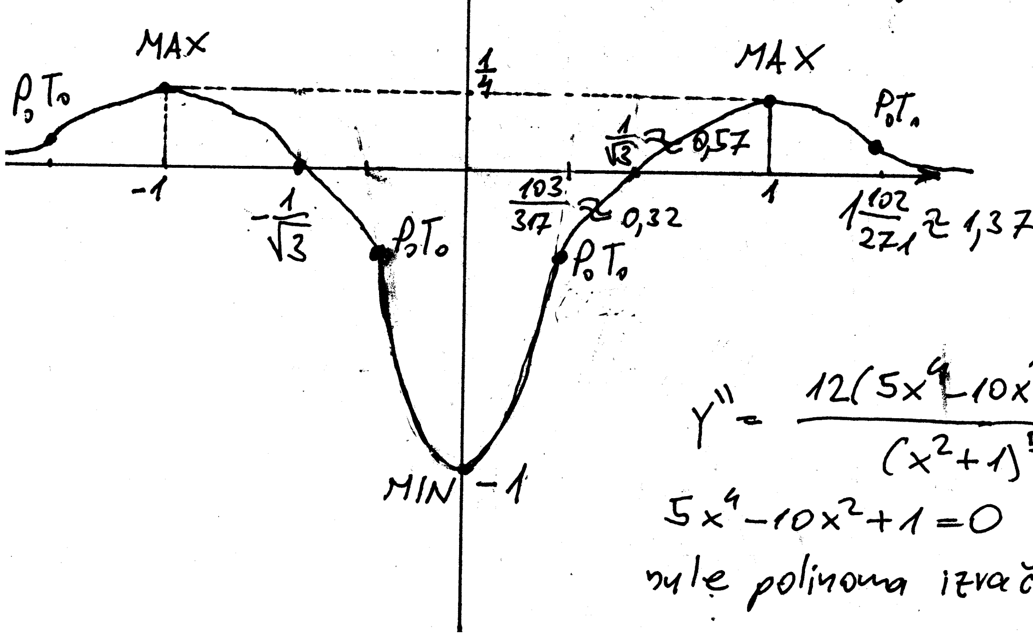
nema V.A.

$y=0$ je H.A.

$$y'=\frac{-12x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$$

x	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
y'	+	−
y	↗	↘

MIN $(0,-1)$ MAX $\left(1,\frac{1}{4}\right)$



$$y''=\frac{12(5x^4-10x^2+1)}{(x^2+1)^5}$$

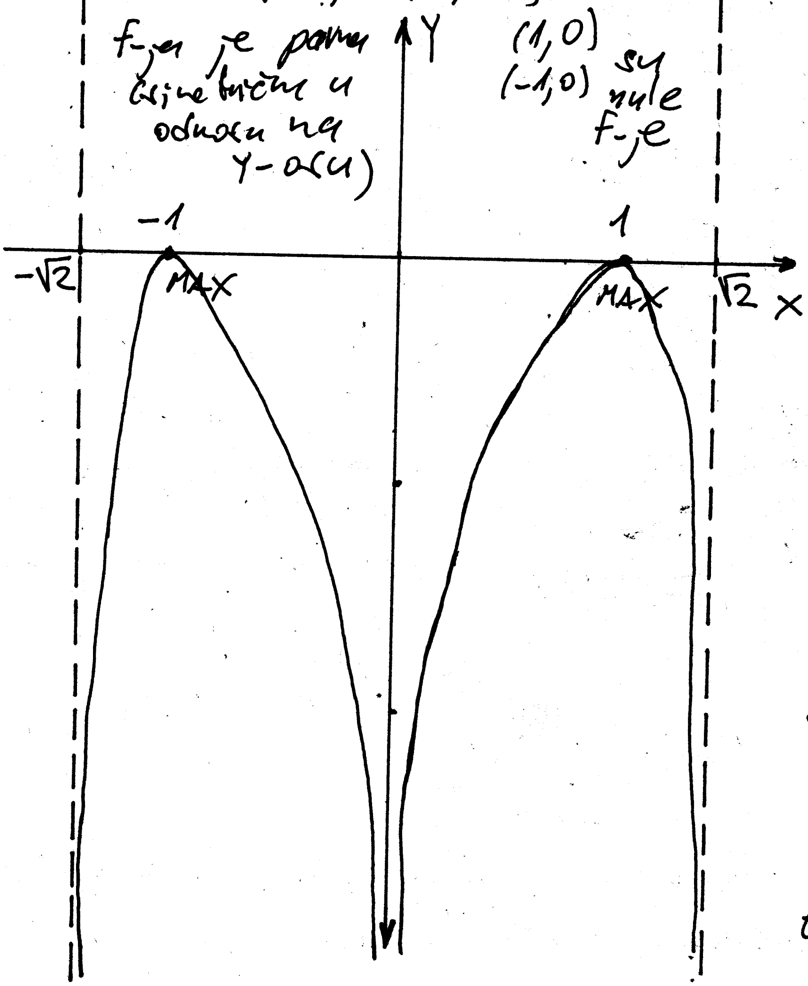
$5x^4-10x^2+1=0$ akko $x_1=\frac{103}{317}$, $x_2=1\frac{102}{271}$

nule polinoma izračunate na digitronu.

Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik $y=\ln(2x^2-x^4)$.

Rj.-upute:

$D: x\in(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$



$x=0$ je V.A. nema H.A.

$x=\sqrt{2}$ je V.A. nema K.A.

f-ja je negativna za $\forall x\in D$

$$y'=\frac{4(x^2-1)}{x(x^2-2)}$$

x	(0,1)	(1,$\sqrt{2}$)
y'	+	−
y	↗	↘

MAX (1,0)

$$y''=(-4)\,\frac{x^4-x^2+2}{x^2(-2+x^2)^2}$$

$y''<0\ \forall x$ f-ja nema prevojnih tački i uvijek je $\cap$

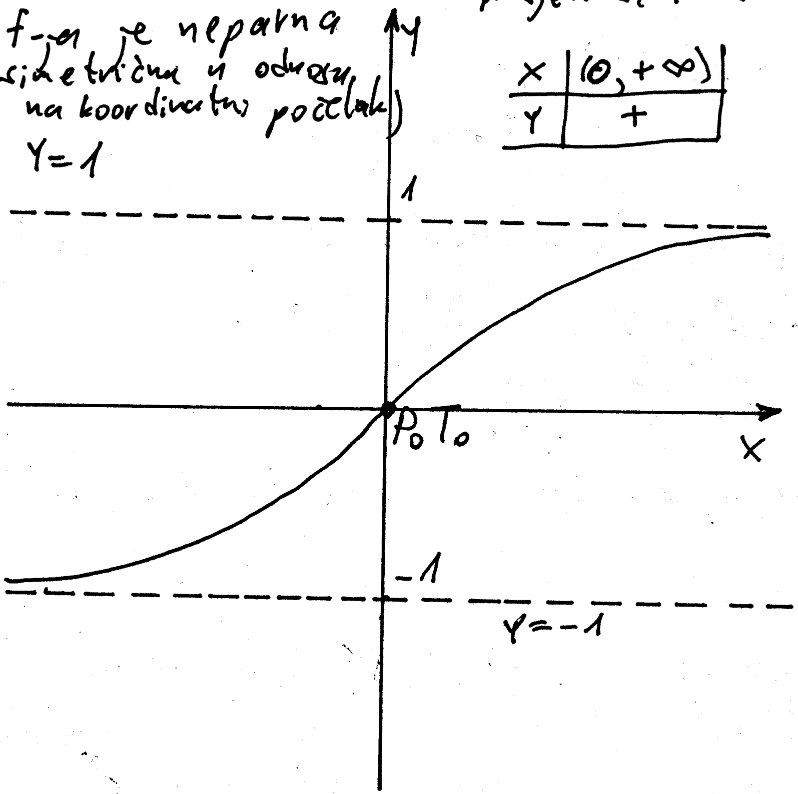
⊕ Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik $y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

Rj.-upute:

$D: x\in\mathbb{R}$

f-ja je neparna (simetrična u odnosu na koordinatni početak)

$Y=1$



(0,0) je nula i presjek sa Y-osom

x	$(0,+\infty)$
Y	+

f-ja je definisana za $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ nema VoAo

$Y=\pm 1$ je HoAo

$$y'=\frac{4\cdot e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^{2}}=\frac{4}{(e^{x}+e^{-x})}$$

$y'>0$ $\forall x\in D$ f-ja raste za $\forall x\in D$

nema ekstrema

$$y''=\frac{-8(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^{3}},$$

x	$(0,+\infty)$
y''	$-$
y	$\cap$

PoTo

$y''=0$ akko $x=0$

(0,0) je PoTo

Odrediti integrale

(a) $$\int \frac{6x^2-19x+9}{(x-2)(x^2-5x+6)}\,dx$$

(b) $$\int \frac{8x^2+39x+11}{(x+2)(x^2-x-6)}\,dx$$

(c) $$\int \frac{8x^2-35x+3}{(x^2+1)(x-7)}\,dx$$

Rj.-upute

(a) $$\frac{6x^2-19x+9}{(x-2)(x^2-5x+6)} = \ldots = \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{6}{x-3}$$

$$\int \frac{6x^2-19x+9}{(x-2)(x^2-5x+6)}\,dx = \ldots = -\frac{5}{(x-2)} + 6\ln|x-3| + C$$

(b)

$$\frac{8x^2+39x+11}{(x+2)(x^2-x-6)} = \ldots = \frac{7}{(x+2)^2} + \frac{8}{x-3}$$

$$\int \frac{8x^2+39x+11}{(x+2)(x^2-x-6)}\,dx = \ldots = -\frac{7}{x+2} + 8\ln|x-3| + C$$

(c) $$\frac{8x^2-35x+3}{(x^2+1)(x-7)} = \ldots = \frac{5x}{x^2+1} + \frac{3}{x-7}$$

$$\int \frac{8x^2-35x+3}{(x^2+1)(x-7)}\,dx = \ldots = \frac{5}{2}\ln|x^2+1| + 3\ln|x-7| + C$$

(#) Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$y' + y \, tg\, x = \cos x$$

Rj. Data jednačina je linearna dif. jedn. Uvodimo smjenu $y = uv$

$y' = u'v + uv'$ (u i v su dvije pomoćne f-je

cilj je dobiti dvije dif. jedn. sa razdvojenim promjenjivim).

$$u'v + uv' + uv\, tg x = \cos x$$

$$u'v + \underbrace{u(v' + v\, tg x)}_{=0} = \cos x$$

(a)

$$v' + v\, tg x = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -v\, tg x$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{d(\cos x)}{\cos x} \quad \Big/ \int$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x|$$

$$v = \cos x$$

(b)

$$u'v = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} \cos x = \cos x$$

$$du = dx$$

$$u = x + C$$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine je

$$y = (x + C) \cos x$$

(#) Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$x^2y^2y' + x\,y^3 = y^2$$

Rj.

$$x^2y^2y' + x\,y^3 = y^2 \quad /:y^2$$

$$x^2y' + x\,y = 1 \quad /:x^2$$

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina (uvodimo smjenu $y = uv$ gdje su u i v dvije pomoćne f-je – cilj je dobiti dvije dif. jedn. sa razdvojenim promjenjivim)

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{1}{x^2}$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{1}{x}v\right)}_{=0} = \frac{1}{x^2}$$

(a)

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad \Big/ \int$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$v = \frac{1}{x}$$

(b)

$$u'v = \frac{1}{x^2}$$

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \quad /\cdot x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$u = \ln|x| + c$$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine je

$$y = (\ln x + c)\cdot\frac{1}{x}$$

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y' - y\sin 2x = e^{\sin^2 x}$$

Rj. Primjetimo da imamo linearnu diferencijalnu jednačinu. Uvodimo smjenu $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - uv\sin 2x = e^{\sin^2 x}$$

$$u'v + u\underbrace{(v' - v\sin 2x)}_{=0} = e^{\sin^2 x}$$

(a)

$$v' - v\sin 2x = 0$$

$$v' = v \cdot 2\sin x\cos x$$

$$\frac{dv}{v} = 2\sin x\cos x\, dx$$

$$\frac{dv}{v} = 2\sin x\, d(\sin x) \quad / \int$$

$$\ln v = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin^2 x$$

$$v = e^{\sin^2 x}$$

(b)

$$u'v = e^{\sin^2 x}$$

$$u' e^{\sin^2 x} = e^{\sin^2 x}$$

$$u' = 1$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$$

$$u = x + C$$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine je

$$y = (x + c)\, e^{\sin^2 x}$$